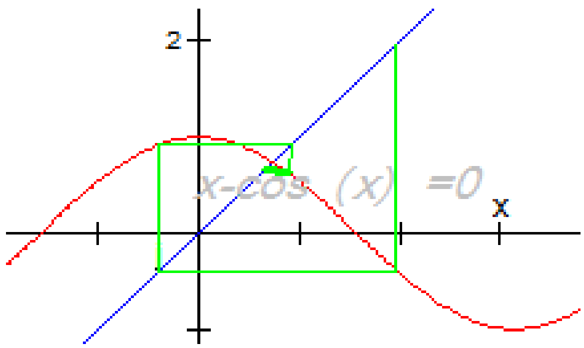
EUCLIDES DOS SANTOS FERNANDES



RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ISE/2008

INSTITUTO SUPERIOR DE EDUCAÇÃO

EUCLIDES DOS SANTOS FERNANDES

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

Trabalho científico apresentado ao ISE para obtenção de grau de Licenciatura em Ensino de Matemática

Orientador:

Eng.º Aurélio Vicente

INSTITUTO SUPERIOR DE EDUCAÇÃO

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Trabalho de fim de curso:

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

O júri:

____

____

____

Praia, __ de ___________ de 2008

Agradecimentos

Se hoje tenho a oportunidade de elaborar um trabalho destes, tenho que agradecer a muitas pessoas que tanto se sacrificaram por mim durante os meus estudos. Queria deixar aqui expressos os meus agradecimentos:

- Primeiramente a Deus e aos meus pais pela vida que me deram e pela força que deles recebi durante os meus estudos.
- Um agradecimento especial ao meu orientador Eng.º Aurélio Vicente, pela dedicação e atenção demonstrada ao longo da orientação deste trabalho.
- Um agradecimento extensivo a todos os meus irmãos, primos, tios, avós; enfim, todos os meus familiares que de uma maneira ou de outra contribuíram para a realização deste trabalho.
- Agradeço a todos os meus professores e colegas por este longo caminho que percorremos juntos.

MUITO OBRIGADO A TODOS!

Euclides Fernandes

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha mãe **CLARINDA DOS SANTOS** pelo sofrimento que ela passou quando as minhas exigências ultrapassavam a sua capacidade.

ÍNDICE

Neste trabalho encontram-se desenvolvidos os principais métodos numéricos de resolução de equações não lineares. Como sabemos, na resolução de equações deste tipo não existem fórmulas resolventes, então essas equações são resolvidas por métodos numéricos. Num método numérico é possível distinguir três fases: a primeira fase consiste na formulação matemática do problema, na segunda fase escolhe-se o método de resolução e a última fase é reservada ao cálculo numérico da solução aproximada. Basicamente o método numérico é um conjunto ordenado de operações aritméticas e lógicas fundamentadas em teoremas da Análise Matemática, que conduz à solução aproximada do problema. A um método numérico está sempre associado um algoritmo.

O aparecimento de computadores veio possibilitar cálculos numéricos até então humanamente impossíveis, o que teve como reflexo o desenvolvimento de novos métodos numéricos e o aperfeiçoamento dos já existentes. Desde então a Análise Numérica desenvolveu-se como ciência própria contribuindo para a resolução dos mais variados problemas numéricos. A Análise Numérica desenvolveu uma teoria própria: A Teoria Dos Erros. Deste modo, um método numérico deve ser sempre acompanhado de um estudo sobre majorações de erros e convergência.

Tendo em conta isso, para resolver equações não lineares é necessário o conhecimento da Análise Matemática sobretudo dos teoremas básicos. Atendendo a este facto a primeira parte deste trabalho está reservada aos conceitos básicos da Análise Matemática, seguidos de conceitos também básicos da teoria dos erros. Na segunda parte encontra-se a fundamentação teórica dos principais métodos de resolução de equações não lineares, acompanhados dos respectivos algoritmos que permitem traduzi-los num programa inteligível para o computador. Neste caso os algoritmos encontram-se traduzidos no Maple (em anexo).

1 – CONCEITOS PRELIMINARES

1.1 Teoremas e conceitos básicos da Análise Matemática

Definição 1.1 (limite): Se f é uma função real de variável real, então o limite da função f no ponto c (caso exista) é definido da seguinte forma.

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Significa que existe um $\varepsilon > 0$ tal que a distância entre $f(x)$ e L é menor que ε quando a distância entre x e c é menor que δ, isto é,

$$|f(x) - L| < \varepsilon \ \ quando \ 0 < |x - c| < \delta$$

Teorema 1.1 (**do Valor Intermédio**) Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, uma função contínua. Dado um número γ entre os valores $f(a)$ e $f(b)$ existe um ponto intermédio $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = \gamma$.

Corolário do teorema do valor intermédio

Se f é uma função contínua em $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e se $f(a)\ e\ f(b)$ tiverem sinais contrários, então existe pelo menos um número real c entre $a\ e\ b$ tal que $f(c) = 0$

Teorema 1.2 (**do Valor Médio** também conhecido como Teorema de Lagrange): Dada uma função contínua f definida num intervalo fechado $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ e diferenciável em $]a, b[$, então existe um ponto c em $]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Corolários do Teorema de Lagrange:

1. Se $f'(x) = 0\ \forall x \in I, f\ é\ constante\ em\ I.$
2. Se $f'(x) \geq 0\ (f'(x) \leq 0), \forall x \in I\ então\ f(x) é\ crescente\ \ (decrescente)\ em\ I$
3. Se $f'(x) > 0\ (f'(x) < 0)\ \forall x \in I\ então\ f(x)\ é\ estritamente$ $crescente\ (decrescente)\ em\ I.$

Definição 1.2 (extremos relativos): Seja X uma parte não vazia de *IR*. Diz-se que $f: X \to \mathbb{R}$ tem um máximo local ou relativo no ponto a, quando existe $\varepsilon > 0$ tal que, para qualquer $x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap X$, se tem$f(x) \leq f(a)$.
Do mesmo modo f tem um mínimo local ou relativo no ponto a, quando existe $\varepsilon > 0$ tal que, para qualquer $x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap X$, se tem$f(x) \geq f(a)$. Dizemos também que f tem um extremo local ou relativo no ponto a.

Teorema 1.3 (Teorema de Fermat) Se I é um intervalo de IR com mais de um ponto, $f: X \to IR$ é diferenciável no ponto a interior a I e f tem um extremo local em a, então $f'(a) = 0$.

Teorema 1.4: (**Teorema de Rolle**) Se f é uma função contínua em $[a, b]$ com derivada finita em $[a, b]$ e $f(a) = f(b)$ então existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Corolários do Teorema de Rolle:

1. Se c_1 e c_2 são dois zeros consecutivos de f' então em $[c_1, c_2]$ existe quando muito um zero de f.
2. Dada uma função $f: X \to IR$ diferenciável não pode haver mais do que um zero de $f(x)$ entre dois zeros consecutivos de $f'(x)$.

Teorema 1. 5: (**Teorema de Taylor**) Seja f uma função derivável até ordem $n + 1$ no intervalo $[a, b]$ e supondo que $f^{(n)}$ é contínua no intervalo $[a, b]$. Se x e x_0 são dois pontos de $[a, b]$ com $x \neq x_0$, então existe um ponto c entre x e x_0 tal que:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(x)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

A igualdade acima é conhecida por fórmula de Taylor com o resto de Lagrange, onde

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Definição 1.3 (sucessão convergente): Uma sucessão (U_n) é convergente para l,(que se diz limite da sucessão) em $\mathbb{R}$ se e só se qualquer que seja $\delta > 0$, existe uma ordem depois da qual todos os termos da sucessão são valores aproximados de l a menos de δ.

Traduz-se que l é limite de uma sucessão (U_n), escrevendo $U_n \rightarrow l$. Tem-se pois,

$U_n \longrightarrow l \Leftrightarrow \forall\delta > 0\ \exists p \in IN: n > p \Rightarrow |U_n - l| < \delta$

1.2 Conceitos básicos da teoria dos erros

Tipos de erros num processo de cálculo

Para analisar a qualidade de um resultado numérico, devemos estar cientes das possíveis fontes de erros ao longo de todo o processo. Podemos considerar três tipos de erros: erros inerentes, erros do método e o erro computacional. Nota-se que o efeito do erro total engloba todos os tipos de erros originados ao longo do processo de cálculo. Há certos problemas nos quais a um «pequeno» erro introduzido num certo passo de cálculo, corresponde um erro «grande» na solução final. Um problema deste tipo diz-se mal condicionado.

Erros inerentes

Em geral, o modelo matemático não traduz exactamente a realidade. A fim de se conseguir um modelo que não seja demasiado complicado e difícil de tratar matematicamente, é muitas vezes necessário impor certas restrições idealistas. Os dados e parâmetros dum problema são muitas vezes resultados de medições experimentais e, portanto, afectados de alguma incerteza.

Podemos também mencionar a impossibilidade de representar exactamente certas constantes matemáticas como por exemplo, a constante π.

Erros do método

Uma outra classe de erros resulta do uso de fórmulas que nos dão valores aproximados e não exactos. Por exemplo, a série de MacLaurin para representar e^x

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \qquad -\infty < x < \infty$$

Se pretendermos aproximar o valor de e^y , onde y é um número real, teremos de nos limitar a usar um número finito de termos da série.

$$e^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots + \frac{y^p}{p!}$$

O erro que cometemos, é chamado erro de truncatura e corresponde neste exemplo ao resto de ordem p da série.

Erro computacional

O erro computacional deve-se ao facto de o computador usar apenas um número finito de dígitos para representar números reais. Assim a maioria dos números e dos resultados de operações aritméticas, não podem ser representados exactamente no computador. São assim originados os erros de arredondamento.

Erro absoluto e erro relativo

Seja z o valor exacto duma grandeza real e seja x uma aproximação de z.

Designemos por e: $e = z - x$, o erro de x em relação a z . Ao valor $|e|$ chama-se erro absoluto de x. Se $z \neq 0$, designa-se δ por

$$\delta = \frac{z - x}{z}$$

E chama-se a $|\delta|$ o erro relativo de x.

Ao produto $100|\delta|$ expresso em percentagem chama-se percentagem do erro.

2. RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES – MÉTODOS ITERATIVOS

2.1 Introdução

Como sabemos não existem fórmulas resolventes que permitam determinar algebricamente as soluções de equações de grau superior a quatro. Este facto foi demonstrado por Galois em 1832. Na mesma linha encontram-se as equações transcendentes, como por exemplo $x^2 - \cos x = \tan x$, que não possuem fórmulas resolventes. A necessidade de resolver problemas deste tipo constitui a motivação para aprendizagem de outras técnicas, sendo uma delas o método iterativo.

Antes de apresentarmos os métodos iterativos de resolução de equações não lineares, comecemos por algumas definições.

Definição 2.1 Uma equação não linear pode genericamente escrever-se sob a forma $f(x) = 0$ com $f: D \to IR$ em que $D \subset IR$ é domínio de f.

Definição 2.2 Seja $f(x)$ uma função real de variável real. Diz-se que $z \in IR$ é uma raiz da equação $f(x) = 0$ ou um zero da função f se $f(z) = 0$.

Definição 2.3 A multiplicidade de um zero z da função f é o supremo n dos valores m tais que $\lim\limits_{x \to z} \frac{|f(x)|}{|x-z|^m} = c < \infty$

Obs. Se $n = 1$, o zero diz-se simples, se $n = 2$ o zero diz-se duplo, etc. A multiplicidade de um zero não é necessariamente um número inteiro.

Definição 2.4 Entende-se por processo iterativo um método pelo qual se pode achar uma sucessão $x_1, x_2, \dots x_n \dots$, de valores aproximados ou iterações da solução procurada.

Refira-se que, na prática, cada nova iteração x_{m+1} é calculada recorrendo ao conhecimento de uma ou mais iterações anteriores.

Seja z uma raiz da equação $f(x) = 0$. Chama-se erro e_m da iteração x_m dum processo iterativo a

$$e_m = z - x_m$$

Um processo iterativo, para ter interesse prático, deve gerar iterações que se aproximam da raiz procurada, isto é, deve ser convergente para a referida raiz. Um processo iterativo diz-se convergente quando

$$\lim_{m\to\infty} x_m = z$$

ou, de uma forma equivalente, quando

$$\lim_{m\to\infty} e_m = 0$$

Considerando convergente um dado processo iterativo, a caracterização da sua velocidade de convergência para uma certa raiz, é outra noção que importa formalizar e que tem muita importância.

Definição 2.5: seja $\{x_m\}$ uma sucessão que converge para z e $e_m = z - x_m$. Se existirem p≥ 1 e $K_\infty > 0$ tais que

$$\lim_{m\to\infty} |e_m|/|e_m|^p = K_\infty$$

Então a sucessão $\{x_m\}$ converge para z com convergência de ordem p. A K_∞ chama-se coeficiente assimptótico de convergência. Se $p = 1$ a convergência é linear; se $p > 1$ a convergência é supra linear; e no caso de $p = 2$ a convergência é quadrática.

O coeficiente assimptótico de convergência K_∞ mede a rapidez de convergência quando m for suficientemente grande. Assim quanto maior a ordem de convergência maior também será a velocidade de convergência.

A determinação iterativa de zeros de funções passa pela resolução dos problemas seguintes:

1. Determinação dos intervalos com menor amplitude possível nos quais existe um e um só dos zeros de f;
2. Cálculo aproximado da raiz utilizado um processo iterativo convergente. Para tal é importante escolher adequadamente os valores iniciais do processo;
3. Avaliação do erro cometido, tendo em conta o critério de paragem utilizado.

Relativamente aos critérios de paragem, podemos referir que é habitual fixar o número máximo de iterações, impondo simultaneamente:

$$|e_m| \leq \varepsilon$$

em que ε representa a exactidão desejada na determinação da raiz.

Em algumas circunstâncias utiliza-se como critério de paragem, em substituição da referida anteriormente, a condição

$$|x_{m+1} - x_m| \leq \varepsilon$$

em que ε representa uma tolerância apropriada.

Podemos, também, utilizar um critério de paragem baseado na estimativa do erro relativo δ:

$$\frac{|x_{m+1} - x_m|}{|x_{m+1}|} \leq \delta$$

Seguidamente apresentaremos os principais métodos iterativos utilizados para resolver as equações não lineares.

2.2 MÉTODO DA BISSECÇÃO

2.2.1 Descrição do método

O método da bissecção baseia-se no seguinte corolário do teorema do valor intermédio:

Teorema 2.1 Dado um intervalo $I = [a, b]$ e uma função f que satisfaz as seguintes condições:

$$f \text{ é contínua em } I = [a, b] \tag{1}$$

$$f(a)f(b) < 0 \tag{2}$$

Então a equação $f(x) = 0$ tem pelo menos um solução z em $]a, b[$.

É fácil verificar que (2) não garante por si só a existência de uma raiz z. Para aplicar o método da bissecção basta que f verifique as condições (1) e (2). Se para além das condições (1) e (2), f' existir, e for contínua e diferente de zero em $]a, b[$, conclui-se, pelo teorema de Rolle, que a solução é única em $]a, b[$.

O método da bissecção consiste em construir sub-intervalos $I_m = [a_m, b_m] \subset [a, b]$ por divisões ao meio e relativamente aos quais também se verifica a condição (2). Deste modo vamos confinando um zero da função f a intervalos tão pequenos quanto desejarmos.

Concretizando, ponhamos

$$I_{m=}[a_m, b_m] \quad m = 0,1,2, \ldots$$

em que $a_0 = a \; e \; b_o = b$ e seja x_{m+1} o ponto médio do intervalo I_m, isto é,

$$x_{m+1} = \frac{a_m + b_m}{2}$$

Consideremos as três situações seguintes:

1-Se $f(x_{m+1}) = 0$, então x_{m+1} é um zero e o processo iterativo termina.

2-Se $f(a_m) \; e \; f(x_{m+1})$ tiverem sinais diferentes faça-se

$$a_{m+1} = a_m \quad e \quad b_{m+1} = x_{m+1}$$

3-Se pelo contrário $f(b_m) \; e \; f(x_{m+1})$ tiverem sinais diferentes então ponha-se

$$a_{m+1} = x_{m+1} \;\; e \;\; b_{m+1} = b_m$$

Deste modo garante-se que o novo intervalo $I_{m+1} = [a_{m+1}, b_{m+1}]$ contém pelo menos um zero de f. Pela forma como foi construído este sub-intervalo tem um comprimento que é metade do comprimento do sub-intervalo procedente. Portanto

$$b_{m+1} - a_{m+1} = \frac{1}{2}(b_m - a_m) \tag{3}$$

Por outro lado, sendo z um zero localizado em I_{m+1}, temos que

$$|z - x_{m+1}| \leq |x_{m+1} - x_m|$$

2.2.2 Convergência do método da bissecção

Como no intervalo I_m está localizado pelo menos um zero z e x_{m+1} é ponto médio deste intervalo, vamos esquematizar as ideias do método da bissecção da seguinte forma:

$$I_0 = [a, b], \quad |I_0| = b - a$$

$$x_1 = \frac{b + a}{2}, \qquad |I_1| = \frac{b - a}{2}$$

$$x_2 = \frac{b_1 + a_1}{2}, \qquad |I_2| = \frac{b - a}{2^2}$$

$$x_3 = \frac{b_2 + a_2}{2}, \qquad |I_3| = \frac{b - a}{2^3}$$

...

$$x_m = \frac{b_{m-1} + a_{m-1}}{2}, \qquad |I_1| = \frac{b - a}{2^m}$$

Obtemos intervalos, contendo z, de amplitude cada vez mais pequena. São válidos os seguintes majorantes para os erros das sucessivas aproximações de z.

$$z, x_1 \in I_0 \Longrightarrow |e_1| = |z - x_1| \leq \frac{b-a}{2}$$

$$z, x_2 \in I_1 \Longrightarrow |e_2| = |z - x_2| \leq \frac{b-a}{2^2}$$

$$z, x_3 \in I_2 \Longrightarrow |e_3| = |z - x_3| \leq \frac{b-a}{2^3}$$

...

de modo geral

$$z, x_m \in I_{m-1} \Longrightarrow |e_m| = |z - x_m| \leq \frac{b-a}{2^m}$$

da relação

$$0 \leq |e_m| = |z - x_m| \leq \frac{b-a}{2^m} \longrightarrow 0$$

concluímos que

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_m \overset{m \to \infty}{\rightarrow} z$$

Temos assim o seguinte resultado

Teorema 2.2 Seja $f(x)$ contínua em $[a, b]$ com $f(a)f(b) < 0$ e seja z a única raiz de f em $[a, b]$. Então o método converge e tem-se a seguinte estimativa do erro

$$|e_m| = |z - x_m| \leq \frac{b-a}{2^m} \tag{4}$$

Em que, para o caso de $m = 0$, se considera que x_0 é um dos extremos de I. vimos que o método é convergente. O método da bissecção pode ser comparado com o método de convergência linear.

Sabemos que se um método possui convergência linear então

$$e_m \leq k|e_{m-1}| \qquad m = 1,2,3, \dots$$

em que k é um majorante do coeficiente assimptótico de convergência. Aplicando m vezes está desigualdade obtemos

$$|e_m| \leq k^m |e_0|$$

Notando que $|e_0| = |z - x_0| \leq b - a$ se $x_0 \in [a, b]$ e $z \in [a, b]$ vemos que quando o método converge linearmente então existe um k tal que

$$|e_m| \leq k^m (b - a)$$

Comparando com (4) vemos que o método da bissecção comporta-se de uma forma parecida com os métodos de convergência linear, com o coeficiente assimptótico de convergência igual a $\frac{1}{2}$.

Qual é o número de iterações necessárias para obter a precisão desejada?

Dado um número ε é possível estimar o número de iterações m de modo a garantir que

$$|z - x_m| < \varepsilon$$

Como $|z - x_m| < \frac{b-a}{2^m}$ basta impor $\frac{b-a}{2^m} < \varepsilon$, ou seja

$$b - a < 2^m \varepsilon \Leftrightarrow \frac{b - a}{\varepsilon} < 2^m \Leftrightarrow \ln\left(\frac{b - a}{\varepsilon}\right) < m(ln2) \Leftrightarrow m > \frac{\ln\left(\frac{b - a}{\varepsilon}\right)}{ln2}$$

Tomando m o número inteiro imediatamente a seguir ao valor acima, temos a garantia que x_m satisfaz a precisão desejada.

2.2.3 Algoritmo do método da bissecção

NOTA: Condições suficientes de convergência do método da bissecção

$$f \text{ é } contínua \ em \ [a, b]$$

$$f(a)f(b) < 0$$

Algoritmo 1

INICIALIZAÇÃO

$a_0 = a, \qquad b_0 = b, \qquad x_0 = b$

CICLO: Para $m = 0,1,2, \dots \ fazer$

$$x_{m+1} = \frac{a_m + b_m}{2}$$

SE $|x_{m+1} - x_m| \leq \varepsilon \ ou \ f(x_{m+1}) = 0$

ENTÃO fazer $z = x_{m+1}$, SAÍDA

SE $f(x_{m+1})f(a_m) < 0$

ENTÃO fazer $a_{m+1} = a_m$, $b_{m+1} = x_{m+1}$
SE NÃO fazer $a_{m+1} = x_{m+1}$, $b_{m+1} = b_m$
FIM DO CICLO.

Vamos representar o método da bissecção geometricamente, o que nos permite uma melhor visualização.

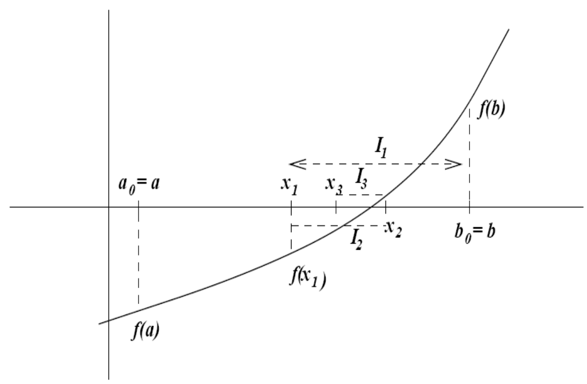


Figura 1: Exemplo do método da bissecção

Exemplo1

Determinar pelo método da bissecção, a raiz de $f(x) = x - cosx$ no $I = [0,1]$ com um erro inferior a 10^{-3}.

Resolução

$f(x) = x - cosx$

$f(x)$ é $contínua\ no\ inervalo$ $[0,1]$

$f(0)f(1) < 0$

Então existe pelo menos um zero no intervalo $I = [0,1]$

$f'(x) = 1 + senx$ e como não se anula em $I =]0,1[$, então podemos concluir que $f(x)$ é monótona, pelo que possui um único zero no referido intervalo.

Calculemos o número de iterações necessárias para satisfazer a precisão:

$$m > \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{ln2} \Leftrightarrow m > \frac{\ln\left(\frac{1-0}{10^{-3}}\right)}{ln2} \Leftrightarrow m > 6.64$$

São necessárias 7 iterações

m	a_{m-1}	b_{m-1}	x_m	$f(x_m)$
-1			0.0000	-1.0000
0			1.0000	0.4596
1	x_{-1}	x_0	0.5000	-0.3775
2	x_1	x_0	0.7500	0.0183
3	x_1	x_2	0.6250	-0.1859
4	x_3	x_2	0.6875	-0.0853
5	x_4	x_2	0.7187	-0.0338
6	x_5	x_2	0.7344	-0.0079
7	x_6	x_2	0.7422	0.0052

Tabela 1: Exemplo do método da bissecção

Desta tabela conclui-se que x_2 é uma melhor aproximação de z do que x_3, x_4, x_5. Comparando $f(x_1) = -0.3775$ com $f(x_2) = 0.0183$ era de esperar que z estivesse mais perto de x_3 do que x_2 mas no entanto não aconteceu. Assim, se além do sinal utilizarmos o próprio valor de $f(x_m)$ é de esperar que tenhamos métodos com convergência mais rápida do que a do método da bissecção.

Este exemplo permite-nos realçar duas características importantes do método da bissecção.

1. A convergência poderá ser bastante lenta.
2. A convergência é certa quando f satisfaz as condições (1) e (2), isto é, quando f é contínua num intervalo $[a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$.

Como é frequente verificar-se estas condições, o método da bissecção é por vezes utilizado como fase preparatória de localização de zeros num intervalo mais ou menos pequeno que torne possível o arranque de outros métodos mais rápidos mas cuja convergência pode estar condicionada a uma boa aproximação inicial do zero.

2.3 MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO

2.3.1 Descrição do método

Como já referimos anteriormente a única informação sobre a função f que o método da bissecção utiliza é o seu sinal, o que é muito reduzido. É de esperar que, se recorrermos a mais informações sobre o andamento de f, possamos conceber métodos mais rápidos. Tal como para o método da bissecção, consideremos no método da FALSA POSIÇÃO uma função f que satisfaz no intervalo $I_m = [a_m, b_m]$, as condições (1) e (2). Nesse intervalo $f(x)$ é aproximada pela secante

$$p_1(x) = f(b_m) + \frac{f(b_m) - f(a_m)}{b_m - a_m}(x - b_m) \tag{5}$$

que passa pelos pontos $\left(a_m, f(a_m)\right)$ e $\left(b_m, f(b_m)\right)$ (onde p_1 é um polinómio interpolador de f) o zero x_{m+1} de p_1 constitui uma aproximação do zero z de f. Então se fizermos em (5) $x = x_{m+1}$ obtemos

$$p_1(x_{m+1}) = 0 \Leftrightarrow f(b_m) + \frac{f(b_m) - f(a_m)}{b_m - a_m}(x_{m+1} - b_m) = 0 \tag{6}$$

Resolvendo a equação em ordem x_{m+1} teremos

$$x_{m+1} = b_m - f(b_m)\frac{b_m - a_m}{f(b_m) - f(a_m)} \tag{7}$$

Fazendo $a_{m+1} = x_{m+1}$ ou $b_{m+1} = x_{m+1}$ e mantendo o outro extremo do intervalo inalterado consoante for $f(x_{m+1})f(b_m) < 0$ ou $f(x_{m+1})f(a_m) < 0$, e procedendo de igual modo podemos obter nova aproximação do zero z.

2.3.2 Algoritmo da falsa posição

NOTA: Condições suficientes de convergência do método:

f é contínua em $[a, b]$

$f(a)f(b) < 0$

Algoritmo 2

INICIALIZAÇÃO:

$a_0 = a$, $b_0 = b$, $x_0 = b$

CICLO: para $m = 0,1, \dots$ FAZER

$$x_{m+1} = b_m - f(b_m)\frac{b_m - a_m}{f(b_m) - f(a_m)}$$

SE $|x_{m+1} - x_m| \leq \varepsilon$ ou $f(x_{m+1}) = 0$

ENTÃO FAZER $z = x_{m+1}$, SAÍDA
SE $f(x_{m+1})f(a_m) < 0$
ENTÃO FAZER $a_{m+1} = a_m$, $b_{m+1} = x_{m+1}$
SE NÃO FAZER $a_{m+1} = x_{m+1}$, $b_{m+1} = b_m$
FIM DO CICLO

Notando que x_{m+1} é a abcissa do ponto de intersecção da recta que passa pelos pontos de coordenadas $\left(a_m, f(a_m)\right)$, $(b_m, f(b_m))$, com eixo x, construímos um esboço, representado na figura 2, que permite visualizar melhor o método da falsa posição.

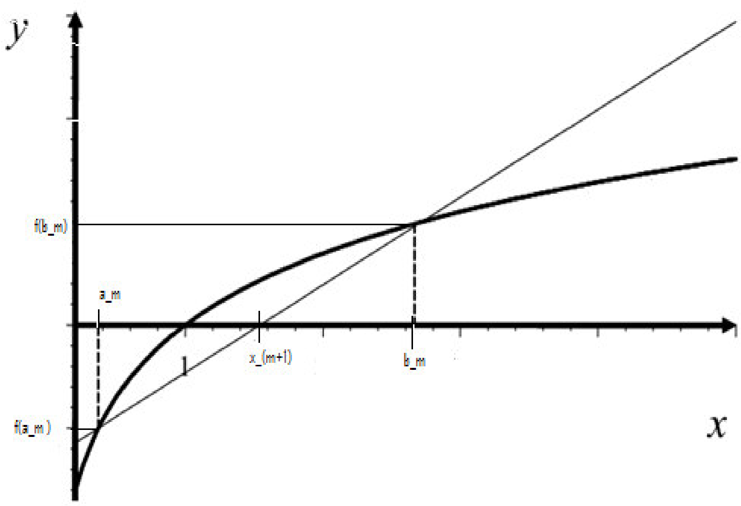


Figura 2: Exemplo do método da falsa posição

Desta figura vemos que para o caso nela representado têm-se $a_{m+1} = a_m$ $\forall m \geq 1$. Isto deve-se ao facto de $f(x)$ não mudar de convexidade em $[a_1, b_1]$, isto é $f''(x) \neq 0$ em $[a_1, b_1]$.

Em geral quando temos $f''(x) \neq 0$ num intervalo aberto I_r com extremos a_r e b_r, sendo $r \geq 0$, então verifica-se que

$$f''(x)f(a_r) > 0 \quad x \in I_r \Rightarrow a_{m+1} = a_m \qquad \forall m \geq r$$

ou

$$f''(x)f(b_r) > 0 \quad x \in I_r \Rightarrow b_{m+1} = b_m \qquad \forall m \geq r$$

Assim se $f''(x) \neq 0 \; em \; [a,b]$ o método iterativo da falsa posição exprime-se por

$$x_{m+1} = x_m - f(x_m)\frac{x_m - w_0}{f(x_m) - f(w_0)} \qquad m = 0,1,2,\dots \tag{8}$$

em que

$w_0 = a, x_0 = b \; se \; f''(x)f(a) > 0 \; e \; w_0 = b, x_0 = a \; se \; f''(x)f(b) > 0$

$com \; x \; \in [a,b]$.

Exemplo 2

Determinar pelo método da falsa posição a raiz positiva da equação $x^2 - 2 = 0$ com um erro inferior $\varepsilon = 5 \times 10^{-6}$. Tomar $a = 0, b = 2$.

Resolução

$f(x) = x^2 - 2$

$f(x)$ é $contínua \; no \; inervalo$ [0,2]

$f(0)f(2) < 0$

Então existe pelo menos um zero no intervalo $I = [0,2]$

$f'(x) = 2x$ e como f não se anula em $I =]0,2[$, podemos concluir que possui um único zero no referido intervalo.

m	a_{m-1}	b_{m-1}	x_m	$f(x_m)$	e_m	$e_{m/}e_{m-1}$
-1			0.000000	-2.000000	1.414214	
0			2.000000	2.000000	-0.585787	
1	x_{-1}	x_0	1.000000	-1.000000	0.414214	-0.7071
2	x_1	x_0	1.333333	-0.222222	0.080880	0.1953
3	x_2	x_0	1.400000	-0.040000	0.014214	0.1757
4	x_3	x_0	1.411765	-0.006920	0.002449	0.1723
5	x_4	x_0	1.413793	-0.001189	0.000420	0.1717
6	x_5	x_0	1.414141	-0.000204	0.000072	0.1716
7	x_6	x_0	1.414201	-0.000035	0.000012	0.1722
8	x_7	x_0	1.414211	-0.000006	0.000002	0.1747
9	x_8	x_0	1.414213	-0.000001	$3.8\text{x}10^{-7}$	0.1747

Tabela 2: Exemplo da falsa posição para $f(x) = x^2 - 2$.

2.3.3 Convergência do Método da Falsa Posição

Para compreender o comportamento da convergência do método da falsa posição, é necessário uma fórmula que permita relacionar os erros em iterações sucessivas. Vimos que o método da falsa posição se baseia na aproximação da função f pelo polinómio interpolador p_1 dado em (5). Tendo em conta o estudo da interpolação polinomial temos que

$$f(x) = p_1(x) + \frac{1}{2} f''(\xi_m)(x - a_m)(x - b_m) \tag{9}$$

Em que p_1 é dado por (5) e ξ_m é um número real compreendido entre o mínimo de $\{a_m, b_m, x\}$ e o máximo de $\{a_m, b_m, x\}$. Nota-se que se fizermos tender b_m para a_m, então (9) reduz-se à conhecida fórmula de Taylor

$$f(x) = f(a_m) + f'(a_m)(x - a_m) + \frac{1}{2} f''(\xi_m)(x - a_m)^2$$

em que $\xi_m \in int(a_m, x)$.

fazendo em (9) $x = z$, sendo z um zero de f, temos

$$f(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(b_m) + \frac{f(b_m) - f(a_m)}{b_m - a_m}(z - b_m) + \frac{1}{2} f''(\xi_m)(z - a_m)(z - b_m) = 0 \tag{10}$$

em que $\xi_m \in \text{int}\,(a_m, b_m, z)$. Utilizando novamente (6)

$$p_1(x_{m+1}) = 0 \Leftrightarrow f(b_m) + \frac{f(b_m) - f(a_m)}{b_m - a_m}(x_{m+1} - b_m) = 0$$

e subtraindo a (10), teremos

$$\frac{f(b_m) - f(a_m)}{b_m - a_m}(z - x_{m+1}) + \frac{1}{2} f''(\xi_m)(z - a_m)(z - b_m) = 0 \tag{11}$$

atendendo ao teorema de Lagrange,

$$\frac{f(b_m) - f(a_m)}{b_m - a_m} = f'(\eta_m)$$

em que $\eta_m \in (a_m, b_m)$. Portanto de (11) temos finalmente que

$$z - x_{m+1} = -\frac{f''(\xi_m)}{2f'(\eta_m)}(z - a_m)(z - b_m) \qquad (12)$$

Como vimos, quando $f''(x) \neq 0$ em $[a, b]$, um dos extremos imobiliza-se. Tal como em (8) designamos este extremo por w_0. Assim com esta condição, se em (12) substituirmos a_m e b_m por w_0 e x_m, obtemos

$$e_{m+1} = \left[-\frac{f''(\xi_m)}{2f'(\eta_m)}(z - w_0)\right] e_m$$

Em que $\eta_m \in int(w_0, x_m)$, $\xi_m \in int(w_0, x_m)$ e $e_m = z - x_m$. Com a condição considerada, $f''(x) \neq 0$ em, $]a, b[$o termo entre parêntesis recto é sempre diferente de zero e portanto a convergência do método é só linear. Se w_0 estiver muito afastado de z, o valor do coeficiente assimptótico de convergência pode aumentar.

2.3.4 Método da falsa posição modificada

O método da falsa posição pode desenvolver uma convergência lenta quando um dos extremos se imobiliza. Para evitar esse inconveniente pode usar-se a seguinte modificação: em vez de se empregar os pontos $(a_m, f(a_m))$ e $(b_m, f(b_m))$ para traçar a secante, utilizam-se os pontos $(a_m, f(a_m))$ e $(b_m, f(b_m)/2)$. A secante continua a ser definida por um ponto acima e outro abaixo do eixo da abcissa tal como na versão original.

Para melhor compreensão do método da falsa posição modificada apresentamos um algoritmo e um exemplo.

Algoritmo da falsa posição modificada

NOTA: Condições suficientes de convergência do método

f é contínua em $[a, b]$

$f(a)f(b) < 0$

Algoritmo 3

INICIALIZAÇÃO:

$a_0 = a$, $b_0 = b$, $x_0 = b$, $F = f(a_0)$, $G = f(b_0)$

CICLO: para $m = 0,1, \ldots$ FAZER

$x_{m+1} = b_m - G\frac{b_{m-}a_m}{G - F}$

SE $|x_{m+1} - x_m| \leq \varepsilon$ ou $f(x_{m+1}) = 0$

ENTÃO FAZER $z = x_{m+1}$, SAÍDA

SE $f(x_{m+1})f(a_m) < 0$

ENTÃO FAZER $a_{m+1} = a_m$, $b_{m+1} = x_{m+1}$,$G = f(x_{m+1})$

SE TAMBÉM $f(x_{m+1})f(a_m) > 0$

ENTÃO fazer $F = F/2$

SE NÃO FAZER $a_{m+1} = x_{m+1}$, $b_{m+1} = b_m$, $F = f(x_{m+1})$

SE TAMBÉM $f(x_{m+1})f(a_m) > 0$

ENTÃO fazer $G = G/2$

FIM DO CICLO

Exemplo 3:

Determinar pelo método da falsa posição modificada a raiz positiva da equação $x^2 - 2 = 0$ com um erro inferior a 5×10^{-6}, tomando $a = 0, b = 2$.

Resolução

$f(x) = x^2 - 2$

$f(x)$ é *contínua no inervalo* $[0,2]$

$f(0)f(2) < 0$

Então existe pelo menos um zero no intervalo $I = [0,2]$

$f'(x) = 2x$ e como f' não se anula em $I =]0,2[$, podemos concluir que possui um único zero no referido intervalo.

m	a_{m-1}	b_{m-1}	x_m	$f(x_m)$	e_m	e_m/e_{m+1}
-1			0.000000	-2.000000	1.414214	
0			2.000000	2.000000	-0.585787	
1	x_{-1}	x_0	-1.000000	-1.000000	0.414214	-0.7071
2	x_1	x_0	1.333333	-0.222222	0.080880	0.1953
3	x_2	x_0	1.454545	0.115703	-0.040332	-0.4987
4	x_3	x_3	1.413043	-0.003308	0.001170	-0.0290
5	x_4	x_3	1.414197	-0.000047	0.000016	0.0141
6	x_5	x_3	1.414230	0.000045	-0.000016	-0.9681
7	x_6	x_6	1.414214	$-1.19\text{x}10^{-7}$	$2.42\text{x}10^{-8}$	-0.0015
8	x_7	x_6	1.414214	$-1.19\text{x}10^{-7}$	$2.42\text{x}10^{-8}$	1.0000

Tabela 3: Exemplo da falsa posição modificada para $f(x) = x^2 - 2$.

Comparando os resultados apresentados na tabela 3 com os anteriormente obtidos notamos um ligeiro aumento de rapidez de convergência.

2.4 MÉTODO DA SECANTE

2.4.1 Descrição do método

Tal como no método da falsa posição, no método da secante o zero z de f é aproximado pelo zero x_{m+1} da secante p_1 que passa pelos pontos de coordenadas $\left(a_m, f(a_m)\right)$ e $\left(b_m, f(b_m)\right)$ cuja equação já vimos anteriormente. A diferença deste método relativamente ao anterior é que não se impõe que $f(a)f(b) < 0$ e portanto x_{m+1} pode não estar contido em $]a_m, b_m[$ o que pode ter como consequência que o método divirja em certos casos.

Fazendo em (7) $a_m = x_{m+1}$ e $b_m = x_m$, obtemos a fórmula iteradora do método da secante

$$x_{m+1} = x_m - f(x_m)\frac{x_m - x_{m-1}}{f(x_m) - f(x_{m-1})} \qquad m = 0,1,\ldots \tag{13}$$

em que x_0 e x_{-1} são dados.

O método da secante, quando converge, normalmente converge mais rapidamente do que o método da falsa posição devido ao facto de a_m e b_m tenderem ambos para z.

Ilustramos o método o método da secante na seguinte figura

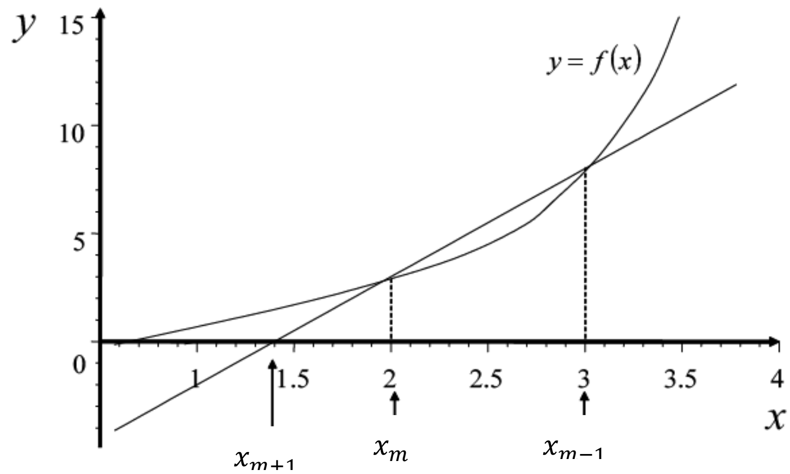


Figura 3: Exemplo do método da secante

Da interpretação geométrica a nova iteradora x_{m+1} é definida a partir da intersecção do eixo das abcissas com a secante que passa pelos pontos de coordenadas $\left(x_m, f(x_m)\right)$ e $\left(x_{m-1}, f(x_{m-1})\right)$.

2.4.2 CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DA SECANTE

Apresentamos as seguintes condições suficientes para que o método da secante convirja:

Seja $f \in c^2[a,b]$ satisfazendo:

1. $f(a)f(b) < 0$
2. $f'(x) \neq 0,\ \forall\, x \in [a,b]$
3. $f''(x) \geq 0\ ou\ f''(x) \leq 0, \forall\, x \in [a,b]$
4. $\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| < b - a\ \ e\ \ \left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right| < b - a$

Se essas condições forem verificadas então o método da secante converge para a raiz de$f(x) = 0\ \forall\, x_{-1}, x_0 \in [a,b]$.

Se para além das quatros condições dadas, também se verifica a condição:

x_0 e x_{-1} são tais que:$f(x_0)f''(x) \geq 0$ e $f(x_{-1})f''(x) \geq 0$ então o método da secante converge para um única raiz de $f(x) = 0$.

Fórmula do erro do método da secante

Para obter uma fórmula dos erros basta utilizar (12) e substituir nessa relação a_m e b_m por x_{m-1} e x_m respectivamente. Obtemos

$$e_{m+1} = -\frac{f''(\xi_m)}{2f'(\eta_m)} e_{m-1} e_m \qquad (14)$$

Com $\eta_m \in int(x_{m-1}, x_m)$ e $\xi_m \in int(x_{m-1}, x_m, z)$. Com esta fórmula é possível fazer o estudo da convergência do método da secante.

Teorema 2.3: Seja f uma função duas vezes diferenciável numa vizinhança de um zero z e tal que $f'(x) \neq 0$. Então se os valores iniciais x_{-1} e x_0 são escolhidos suficientemente perto de z, a sucessão $\{x_m\}$ definida por (13) converge para z.

Demonstração

Escolhemos uma vizinhança $I = [z - \rho, z + \rho]$ $(\rho > 0)$ de z suficiente pequena de modo que

$$M = \frac{max_{x \in I}|f''(x)|}{2min_{x \in I}|f'(x)|}$$

exista e

$$M\rho \leq \delta < 1 \qquad (15)$$

então, atendendo a (15) $x_{m-1}, x_m \in I$ temos que

$$|e_{m+1}| \leq M|e_{m-1}||e_m| \qquad (16)$$

notando que $|e_m| \leq \rho$ quando $x_m \in I$, de (15) e (16) temos que

$$|\, e_{m+1}| \leq \delta |e_m| \qquad (17)$$

e

$$|\, e_{m+1}| \leq \rho$$

e, portanto $x_{m+1} \in I$. Concluímos por indução que $x_{-1}, x_o \in I$ e condição (15) é satisfeita então: para qualquer $m \geq -1$, $x_m \in I$ e (17) é verificada. Se utilizarmos (17) m vezes temos

$$|e_m| \leq \delta^m |e_0|$$

donde, concluímos que $lim_{m\to\infty}|e_m| = 0$, visto que por hipótese $\delta < 1$

Teorema 2.4 Nas condições do teorema 3 a ordem de convergência do método da secante é $p = (1 + \sqrt{5})\ /2 \approx 1.618$.

2.4.3 Algoritmo do método de secante

Algoritmo 4

INICIALIZAÇÃO

$$x_{-1}, x_0\ \in [a, b]\ com\ x_{-1} \neq x_0$$

CICLO: PARA $m = 0,1, \dots FAZER$

$$x_{m+1} = x_m - f(x_m)\frac{x_m - x_{m-1}}{f(x_m) - f(x_{m-1})}$$

SE $|x_{m+1} - x_m| \leq \varepsilon$ ou $f(x_{m+1}) = 0$

ENTÃO FAZER $z = x_{m+1}$, SAÍDA

FIM DO CICLO.

Exemplo 4

Determinar pelo método da secante a raiz da equação $e^{-x^2} - x^2 = 0$ com um erro inferior a 10^{-4}, tomando $a = 0, b = 1$.

Resolução

$f(0) = 1\ e\ f(1) = -0.63212 \Longrightarrow f(a).f(b) < 0$

Como f é contínua, pelo teorema do valor intermédio existe pelo menos um zero neste intervalo.

Pelo método da secante temos: $x_{m+1} = x_m - f(x_m)\frac{x_m - x_{m-1}}{f(x_m) - f(x_{m-1})}$. Tomando $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$, tem-se o seguinte resultado:

m	x_{m+1}
1	0.61270

2	0.74058
3	0.75390
4	0.75309

Tabela 3: Exemplo do método da secante para $f(x) = e^{-x^2} - x^2 = 0$

Como $f(x_5) = 0.000002$ temos que $x_5 = 0.75309$ tem a precisão desejada.

2.5 MÉTODO DE NEWTON

2.5.1 Descrição do método

O Método de Newton baseia-se na aproximação do gráfico $y = f(x)$ na vizinhança de x_m por uma tangente a $f(x)$. Tomamos o zero x_{m+1} da função linear para a aproximação do zero z da função f. Obtém-se assim o método iterativo de Newton

$$x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)} \qquad m = 0,1,\ldots \tag{18}$$

Interpretação gráfica

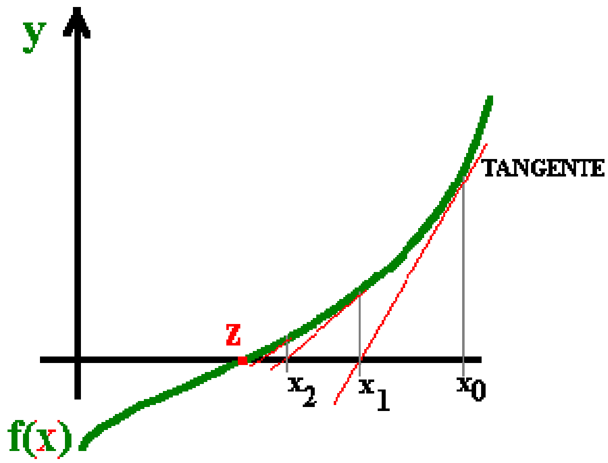


Figura 4: Exemplo do método de Newton

O ponto $x_{m+1}, m \geq 0$ é calculado como sendo o ponto de intersecção, com o eixo dos xx, da recta passando por $\left(x_m, f(x_m)\right)$ com o declive $f'(x_m)$. Essa recta é a tangente ao gráfico de f no ponto de coordanadas $\left(x_m, f(x_m)\right)$ e a sua equação é dada por

$$y = f'(x_m)(x - x_m) + f(x_m)$$

Seja x_{m+1}o ponto de intersecção com o eixo dos xx. Vem

$$0 = f'(x_m)(x_{m+1} - x_m) + f(x_m)$$

donde

$$x_{m+1} - x_m = -\frac{f(x_m)}{f'(x_m)}$$

e obtém-se, assim, o Método de Newton

$$x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)} \qquad m = 0,1, \dots$$

O Método de Newton é o mais conhecido para determinar as raízes de uma equação. Nem sempre é o melhor método para um determinado problema, mas a sua fórmula simples e a sua grande rapidez de convergência fazem dele o método que geralmente se utiliza em primeiro lugar para resolver uma equação.

Uma outra forma de obter o método iterativo de Newton, é utilizar a fórmula de Taylor. Desenvolvendo $f(x)$ em torno dex_m.

$$f(x) = f(x_m) + f'(x_m)(x - x_m) + \frac{1}{2} f''(\xi_m)(x - x_m)^2$$

com $\xi_m \in int(x, x_m)$. Fazendo $x = z$, com $f(z) = 0$, resolvendo em ordem a z obtemos

$$z = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)} - \frac{f''(\xi_m)}{2f'(x_m)}(z - x_m)^2 \tag{19}$$

com $\xi_m \in int(x, x_m)$. Desprezando o último termo, vamos obter a aproximação x_{m+1} dada por (18). Então, subtraindo (18) a (19), chegamos à seguinte fórmula dos erros

$$e_{m+1} = -\frac{f''(\xi_m)}{2f''(x_m)} e^2{}_m \tag{20}$$

com $\xi_m \in int(x, x_m)$, a qual se assemelha à fórmula dos erros do método da secante.

2.5.2 Convergência para o método de newton

Teorema 2.5 seja f uma função duas vezes continuamente diferenciável numa vizinhança de um zero z e tal que $f'(z) \neq 0$. Então se o valor inicial x_0 é escolhido suficientemente perto de z, a sucessão$\{x_m\}$ definida por (18) converge para z. Além disso,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{z - x_{m+1}}{(z - x_m)^2} = -\frac{f''(z)}{2f'(z)} \tag{21}$$

e portanto o método de Newton tem convergência quadrática.

Demonstração:

Escolhemos uma vizinhança $I = [z - \rho, z + \rho]$ $(\rho > 0)$ de z suficientemente pequena de modo que

$$K = \frac{max_{x \in I}|f''(x)|}{2min_{x \in I}|f'(x)|}$$

existe e

$$K\rho \leq \delta < 1 \tag{22}$$

então, atendendo a (20), para todo o $x_m \in I$ temos que

$$|e_{m+1}| \leq Ke_m^2 \tag{23}$$

notando que $|e_m| \leq \rho$ quando $x_m \in I$, de (22) e (23) temos que

$$|e_{m+1}| \leq \delta|e_m| \tag{24}$$

e

$$|e_{m+1}| < \rho$$

e portanto $x_{m+1} \in I$. Concluímos por indução que se $x_0 \in I$ e a condição (22) é satisfeita então: para qualquer $m \geq 0, x_m \in I$ e (24) é verificada. Se utilizarmos (24) m vezes obtemos

$$|e_m| \leq \delta^m|e_0|$$

donde concluímos que $lim_{x\to\infty}|e_m| = 0$, visto que por hipótese $\delta < 1$. Em (20) ξ_m está entre z e x_m e portanto $\xi_m \longrightarrow z$ quando $m \longrightarrow \infty$. Logo

$$\lim_{m\to\infty}\frac{z - x_{m+1}}{(z - x_m)^2} = -\lim_{m\to\infty}\frac{f''(\xi_m)}{2f'(x_m)} = -\frac{f''(z)}{2f'(z)}$$

e portanto (21) fica provada.

2.5.3 Algoritmo do Método de Newton

NOTA: Condições suficientes de convergência do Método de Newton: $f \in C^2([a,b])$, tem um zero z em $[a,b]$ e $|z - x_0| < \frac{min_{x\in[a,b]}|f'(x)|}{max_{x\in[a,b]}|f''(x)|}$

Algoritmo 5

INICIALIZAÇÃO

$x_0 \in [a,b]$

CICLO: PARA $m = 0,1, \ldots$ FAZER

$$x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)} \qquad m = 0,1, \ldots$$

SE $|x_{m+1} - x_m| \leq \varepsilon$

ENTÃO FAZER $raiz = x_{m+1}$, SAÍDA

FIM DO CICLO.

Exemplo 5

Determinar pelo Método de Newton, a raiz da equação $x^3 - 10 = 0$ com um erro inferior a $\varepsilon = 10^{-4}$. Tomar $a = 0, b = 3$ e considerar o caso $x_0 = \frac{a+b}{2}$

Resolução

$f(x) = x^3 - 10$

$f(0).f(3) < 0$

Como f é contínua então existe um zero no intervalo $]0,3[$

Temos que $f'(x) = 3x^2$, então o método de Newton é dado por $x_{m+1} = x_m - \frac{x_m^3 - 10}{3x_m^2}$

Considerando $x_0 = \frac{a+b}{2} = 1.5$, obtém-se:

m	x_{m+1}
0	2.48148
1	2.195644
2	2.15520
3	2.15443

Tabela 5: Exemplo do método de Newton para $f(x) = x^3 - 10$.

Como $f(x_4) = -6.5^{-5}$, então x_4=2.15443 satisfaz a precisão desejada.

Critério de convergência para o Método de Newton

Dado que o teorema 2.5 é de difícil aplicação, vamos apresentar um conjunto de condições suficientes para a convergência do método de Newton que são de verificação mais simples.

Teorema 2.6: Seja $x_0 \in [a,b]\ e\ f$ uma função duas vezes continuamente diferenciável no intervalo $[a,b]$ que satisfaz as seguintes condições:

1. $f(a)f(b) < 0$
2. $f'(x) \neq 0, x \in [a,b]$
3. $f''(x)\ não\ muda\ de\ sinal\ em\ [a,b], i.e., f''(x) \geq 0\ ou$

$$f''(x) \leq 0\ \ com\ x \in [a,b]$$

4. $|f(a)/(f'(a)| < |b-a|\ e\ |f(b)/(f'(b)| < |b-a|$

A condição **(1)** indica a existência da raiz, a condição **(2)** refere-se à unicidade da raiz, **(3)** indica que f não muda o sentido da concavidade em $[a,b]$; e, então com a condição **(4)** conclui-se que o Método de Newton converge para a solução de $f(x) = 0$, qualquer que seja $x_0 \in [a,b]$.

Se as condições 1, 2 e 3 são verificadas e x_0 é escolhido de modo que

$$f(x_0)f''(x) \geq 0, \qquad \forall x \in [a,b]$$

então, o Método de Newton converge para a solução $f(x) = 0$ e a convergência será monótona.

2.6 Iteração do Ponto Fixo

2.6.1Descrição do método

No método do ponto fixo a equação

$$f(x) = 0 \tag{25}$$

cuja raiz z procurada é obtida na forma equivalente

$$x = g(x) \tag{26}$$

nesta forma deve assegurar-se que

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow z = g(z) \tag{27}$$

A aplicação g transforma z em si mesmo, e por isso z é denominado ponto fixo de g e o método iterativo baseado em $x = g(x)$, que apresentaremos seguidamente, é denominado de Ponto Fixo. Este método consiste em construir uma sucessão $x_0, x_1, x_2, \ldots$ tal que

$$x_{m+1} = g(x_m), \qquad m = 0,1, \ldots \tag{28}$$

sendo x_0 uma aproximação inicial de z.

Ilustração gráfica da iteração do ponto fixo

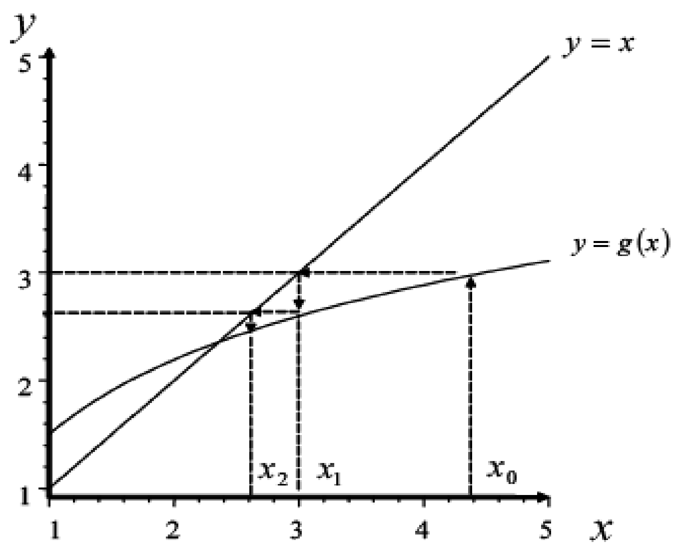


Figura 5: Exemplo da iteração do ponto fixo

2.6.2 Convergência da iteração do ponto fixo

É de salientar que, em geral, a convergência do método iterativo do ponto fixo está associada à contractividade da função iteradora g.

Antes porém, vamos introduzir a seguinte definição

Definição 2.6: Uma função g diz-se Lipschitziana no intervalo $I = [a, b]$ se existir uma constante L>0 tal que

$$|g(y) - g(x)| \leq L|y - x|, \qquad \forall x, y \in I \tag{29}$$

No caso em que $0 < L < 1$ a função diz-se contractiva.

Ainda é possível mostrar que se $g \in C^1([a,b])\ e\ |g'(x)| \leq L < 1, \forall x \in [a,b]$, então g é contractiva no intervalo em causa.

Nota-se que a função Lipschitziana é contínua. Por outro lado, se g for continuamente diferenciável em I, pelo teorema de Lagrange temos que, para $x, y \in I$,

$$g(y) - g(x) = g'(\xi)(y - x) \qquad \xi \in int(y, x)$$

e portanto se $|g'(\xi)| < 1$ para todo o $\xi \in I$, a função g é contractiva. Nesse caso, a constante de Lipschitz pode ser dada por

$$L = \max_{x \in I} |g'(x)|$$

Teorema 2.7 (do ponto fixo): Se existir um intervalo $I = [a, b]$ no qual a função g é contractiva e $g(I) \subset I$, isto é, $a < g(x) \leq b$, então:

1. g possui pelo menos um ponto fixo z em I
2. z é o único ponto fixo em I
3. Para qualquer x_0 em I a sucessão $\{x_m\}$ gerada por (28) converge para z
4. $|z - x_m| \leq \frac{1}{1-L}|x_{m+1} - x_m| \quad , \quad |z - x_{m+1}| \leq \frac{L}{1-L}|x_{m+1} - x_m|$
5. $|z - x_m| \leq L^m|z - x_0| \leq \frac{L^m}{1-L}|x_1 - x_0|$

Demonstração

(1) Se $g(a) = a\ ou\ g(b) = b$ então g tem um ponto fixo em I.

Suponhamos então que $g(a) \neq a$ e $g(b) \neq b$ e consideremos a função contínua $h(x) = g(x) - x$. Por termos suposto que $g(I) \subset I$, tem-se que $h(a) > 0\ e\ h(b) < 0$, pelo teorema do valor intermédio concluímos que h possui um zero no intervalo $[a, b]$. Fica provado que g possui pelo menos um ponto fixo z em I.

(2) Suponhamos que w é um ponto fixo em I. Então por g ser contractiva de (29) temos que

$$|z - w| = |g(z) - g(w)| \leq L|z - w|$$

então

$$(1-L)|z-w| \leq 0$$

como $1-L>0, conclui-se\ que\ w=z.$

(3) Começamos por notar que $\lim_{m\to\infty} x_m = z$ atendendo a que

$|z-x_{m+1}| = |g(z)-g(x_{m)}|$ por (27) e (28), $|g(z)-g(x_m)| \leq L|z-x_m|$, por (29) então se $x_0 \in I$, temos

$$|z-x_{m+1}| \leq L|z-x_m| \quad x_m \in I \tag{30}$$

assim $|z-x_m| < L|z-x_{m-1}|$ e por indução segue-se que

$$|z-x_m| \leq L^m|z-x_0| \quad m=0,1,\ldots \tag{31}$$

quando $m\to\infty$, $L^m \to 0$ ($L<1$por hipótese) e portanto $\lim_{m\to\infty} x_m = z$.

(4) De (30) temos que

$$|z-x_m| - |x_{m+1}-x_m| \leq |(z-x_m)-(x_{m+1}-x_m)| = |z-x_{m+1}| \leq L|z-x_m|$$

logo temos que $(1-L)|z-x_m| \leq |x_{m+1}-x_m|$ e portanto, como $L<1$, obtemos a primeira desigualdade

$$|z-x_m| \leq \frac{1}{1-L}|x_{m+1}-x_m| \tag{32}$$

de (32) e (30) teremos a outra desigualdade pretendida

$$|z-x_{m+1}| \leq \frac{L}{1-L} \leq |x_{m+1}-x_m| \tag{33}$$

(5) A primeira desigualdade coincide com (31). Tomando $m=0$ em (32) e recorrendo a (31) temos a segunda desigualdade

$$|z-x_m| \leq \frac{L^m}{1-L}|x_1-x_0| \tag{34}$$

As desigualdades (31) e (34) permitem obter majorações (a priori) do erro $e_m = z - x_m$ da iterada m sem efectuar as m iterações. As desigualdades (32) e (33) permitem obter majorações (a posteriori) dos erros e_m e e_{m+1} depois de ter efectuado $m+1$ iterações.
Na prática pode ser difícil verificar se g satisfaz ou não a condição (29). Por isso, quando g quando for diferenciável, podemos basear no seguinte teorema

Teorema 2.8 Seja g continuamente diferenciável em $I = [a, b]$ com $|g'| < 1\ em\, I$ e $g(I) \subset I$, então são verificadas todas as proposições do teorema 2.7 e tem-se ainda que: $lim_{m\to\infty} \frac{e_{m+1}}{e_m} = g'(z)$, *e portanto no caso de* $g'(z) \neq 0$ *a convergência é linear sendo o coeficiente assimptótico de convergência* $K_\infty = |g'(z)|$. *(A convergência supra linear só é possível se* $g'(z) = 0$*).*

Demonstração

Visto que a primeira hipótese do teorema implica, como já referimos, que g seja contractiva e que L seja dado $L = \max_{x\in I}|g'(x)|$, concluímos que o teorema 2.7 é aplicável. Por outro lado é basta subtrair (28) e (27) e recorrer mais uma vez ao teorema de Lagrange para termos

$$e_{m+1} = g'(\xi_m)e_m \qquad \xi_m \in int(z, x_m) \tag{35}$$

em que $e_m = z - x_m$. Por conseguinte, no caso de convergência, temos

$$\lim_{m\to\infty} \frac{e_{m+1}}{e_m} = g'(z) \tag{36}$$

Uma vez que g' é contínua. Logo $|g'(z)|$ é o coeficiente assimptótico de convergência.

Vemos que se $|g'(z)| > 1$ não há convergência visto que para x_m suficientemente perto de z tem-se $|e_{m+1}| > |e_m|$, atendendo a (35). Portanto conduzimos ao seguinte:

Teorema 2.9: Seja g continuamente diferenciável em $I = [a, b]$ com $|g'(x)| > 1$ para $x \in I$. Admitindo a existência de um ponto fixo z interior a I, então $|g'(z)| > 1$ e a sucessão $\{x_m\}$ não poderá convergir para z (excluindo o caso de ser $x_m = z$ a partir de uma certa iteração).

Nas hipóteses do teorema 2.8, se $0 < g'(x) < 1$ para $x \in I$, então a convergência é monótona, isto é, $x_0 < x_1 < \cdots < z$ ou $x_0 > x_1 > \cdots > z$ com $x_o \in I$ e se $-1 < g'(x) < 0$ para

$x \in I$, então a convergência é alternada, ou seja, as sucessivas iteradas vão estando alternadamente à esquerda e à direita de z.

Para visualizar melhor o problema da convergência do método do ponto fixo é útil uma representação gráfica para os diferentes casos da convergência e divergência deste método. O ponto fixo z é a abcissa do ponto de intersecção da recta $y = x$ com o gráfico de $y = g(x)$. Para passar da iterada x_0 para a iterada x_1 parte-se do ponto de coordenadas $(x_0, g(x_0))$ pertence ao gráfico de g. Como $x_1 = g(x_0)$, traçamos um segmento horizontal partindo daquele ponto até ao ponto de coordenadas (x_1, x_1) pertencente à recta $y = x$. A abcissa deste ponto é a iterada x_1. Para obter x_2 traça-se um segmento vertical partindo de (x_1, x_1) até ao ponto (x_1, x_2) pertencente ao gráfico de g e procede-se como anteriormente. Estão representadas nas figuras seguintes os vários casos de convergência e divergência considerados atrás.

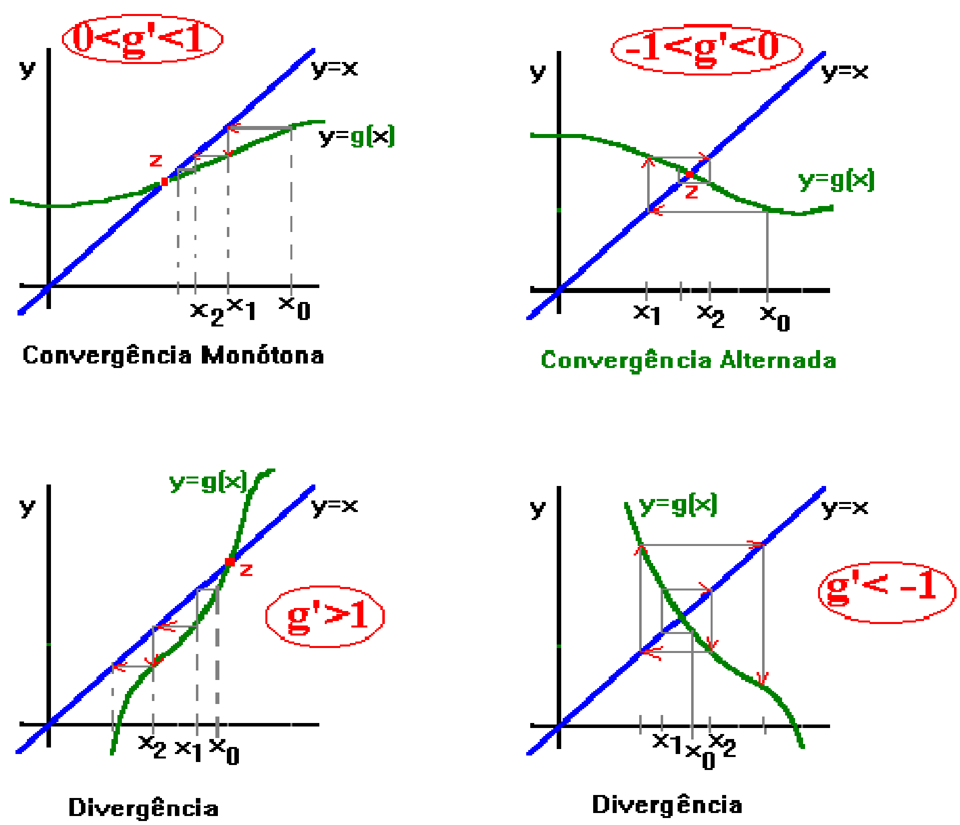


Figura 6: Exemplos de convergência e divergência da iteração do ponto fixo

Ordem de convergência do método do ponto fixo

Teorema 2.10 (0rdem de convergência do método do ponto fixo): Seja $g(x)$ uma função que verifica as condições do teorema do ponto fixo para o intervalo $[a, b]$, ou seja,

1. $g \in [a, b]$
2. $g([a, b]) \subset [a, b]$
3. $\max\limits_{x \in [a,b]} |g'(x)| \leq L < 1$

Então a sucessão definida por $x_{m+1} = g(x), m = 0,1, \ldots$ converge para z, $\forall x_0 \in [a, b]$ e tem-se:

$$\lim_{m \to \infty} \frac{|z - x_{m+1}|}{|z - x_m|} = |g'(z)|$$

Teorema 2.11: (convergência supralinear do método do ponto fixo): Seja $z = g(z)$ com $g \in C^p[a, b]$, $p \geq 2$ verificando as condições do teorema do ponto fixo em$[a, b]$ e $z \in [a, b]$. Se

$$g'(z) = g''(z) = \cdots = g^{(p+1)}(z) = 0 \; e \; g^{(p)}(z) \neq 0$$

então

$$\lim_{m \to \infty} \frac{|e_{m+1}|}{|e_m|^p} = \frac{|g^{(p)}(z)|}{p!}$$

e portanto a sucessão $\{x_m\}$ tem a ordem de convergência p e coeficiente assimptótico de convergência

$$K_\infty = \frac{|g^{(p)}(z)|}{p!}$$

2.6.3 Algoritmo do método iterativo do ponto fixo

Algoritmo 6

NOTA: condições suficientes de convergência do método do ponto fixo: g é continuamente diferenciável e $|g'| < 1\ em\ I = [a,b]\ e\ g(I) \subset I$.

INICIALIZAÇÃO:

$x_0 \in [a,b]$

CICLO: PARA $m = 0,1, \dots\ FAZER$

$x_{m+1} = g(x_m)$

SE $|x_{m+1} - x_m| \leq \varepsilon$

$ENTÃO\ FAZER\ raiz = \ x_{m+1,} SAÍDA$

$FIM\ DO\ CICLO.$

Exemplo 6

Calcula a raiz aproximada da equação $x = cosx\ em\ I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aplicando o método do ponto fixo, utilizando 5 iterações.

Resolução:

$g(0) = 1,\ \ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ então $g(I)) \subset I$.

$g'(x) = -sen(x)\ ,\ |g'(x)| < 1\ em\ I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

A convergência está garantida, então aplicamos o algoritmo:

$$x_0 = 1{,}0$$

$$x_1 = g(x_0) = 0{,}5403$$

$$x_2 = g(x_1) = 0{,}8576$$

$$x_3 = g(x_2) = 0{,}6543$$

$$x_4 = g(x_3) = 0{,}7935$$

$$x_5 = g(x_4) = 0{,}7031$$

A solução aproximada após 5 iterações do ponto fixo é $z = 0{,}7031$.

Exemplo:

Calcular uma raiz aproximada de $f(x) = x - 4 - \frac{1}{3} sen\,(2x)$ no $I = [3{,}5]$ com um erro inferior à 10^{-4} aplicando

a) O método de Newton.

b) O método de Ponto Fixo.

Resolução

a)$f(x) = x - 4 - \frac{1}{3} sen(2x)$, f é contínua

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{3}\cos\,(2x)$$

Então o método de Newton é dado por

$$x_{m+1} = x_m - \frac{x - 4 - \frac{1}{3} sen(2x_m)}{1 - \frac{2}{3}\cos\,(2x_m)} \qquad m = 0{,}1, \ldots$$

Considerando $x_0 = 4$, obtém-se

m	x_{m+1}
0	4.30062
1	4.26201
2	4.26142
3	4.26148

Como $f(x_3) = -0.52270 \times 10^{-5}$ temos a precisão desejada.

b) **Método do Ponto Fixo**

$f(x) = x - 4 - \frac{1}{3}sen(2x),$

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ é } contínua \\ f(3) = -0.90686 \\ f(5) = 1.18134 \end{array}\right\} \text{ então, existe um zero neste intervalo.}$$

$f'(x) = 1 - \frac{2}{3}\cos(2x)$ a 1ª derivada não anula em $I = [3,5]$

Podemos definir como função iteradora a função

$$g(x) = 4 + \frac{1}{3}sen(2x)$$

$\left.\begin{array}{l} g(3) = 3.9 \\ g(5) = 3.8 \end{array}\right\} \Rightarrow g(I) \subset I$ e $|g'(x)| = \left|\frac{2}{3}\cos(2x)\right| < 1$. Pelo que o método converge.

Tomando $x_0 = 4$ temos:

$$x_{m+1} = 4 + \frac{1}{3}sen(2x_m)$$

m	x_m
0	4
1	4.23089
2	4.27363
3	4.25638
4	4.26357
5	4.26061
6	4.26184
7	4.26133
8	4.26154
9	4.26145

Como $f(x_9) = -4.762 \times 10^{-5}$ temos a precisão desejada.

CONCLUSÃO

É sempre agradável chegar ao fim de um trabalho e ter a sensação de que os objectivos propostos foram atingidos.

As equações não lineares são aquelas equações de que todos os professores e alunos tentam fugir, uma vez que não existem as habituais fórmulas directas de as resolver. Mas com a realização deste trabalho ficou bem claro para mim, e para aqueles que terão acesso a ele, que existem métodos eficazes para a resolução das equações não lineares. Durante a sua realização deste não me deparei com grandes dificuldades na utilização destes métodos iterativos, como o da Bissecção, o da Falsa Posição, o da Secante e o do Ponto Fixo, mas o mesmo não se poderá dizer em relação ao método de Newton, visto que tive de determinar a expressão analítica da função primeira derivada, o que em certos casos é muito trabalhoso. Mas apesar disso o este último método é o mais conhecido para determinar as raízes de uma equação. Não é sempre o melhor método para um determinado problema, mas a sua fórmula simples e a sua grande rapidez de convergência fazem dele o método que geralmente se utiliza em primeiro lugar para resolver uma equação.

Foi através da pesquisa bibliográfica e do recurso à internet que consegui ajuda necessária para elaborar este trabalho. Espero que ele possa contribuir positivamente para todos aqueles que se interessam por esta área da Matemática.

Bibliografia

FERREIRA, J.C. *Introdução à Análise Matemática*, Fundação Calouste Gulbenkian, 1991

LEMOS, Carlos e Pina. Heitor, *Métodos numéricos - complementos e guia prático*. IST Press

MARIANI, Viviani Cocco. *Maple- Fundamentos e Aplicações*. LTC. Rio de Janeiro. 2005.

PINA, Heitor. *Métodos Numéricos*, Editora Mc Graw-Hill-Portugal. 1995

RODRIGUES, José Alberto. *Métodos Numéricos - Introdução, Aplicação e Programação* Edições Sílabo. 2003

Internet:

http://www.math. IST.pt/~calves/cursos/MetEqNL.HTM

ANEXO

Com o aparecimento do computador os cálculos tornaram-se mais fáceis. Também a resolução de equações não lineares beneficiou bastante com as novas tecnologias. Para evidenciarmos a contribuição das novas tecnologias na resolução de equações não lineares, vamos apresentar procedimentos no programo informático MAPLE que nos permite encontrar as soluções com maior rapidez.

MÉTODO DA BISSECÇÃO

Tendo em conta o algoritmo do Método de Bissecção, podemos fazer um procedimento no Maple (proc) para resolver este algoritmo. A sintaxe do procedimento pode ser bissecção=proc(função, a, b, erro)

```
> restart;
> # procedimento do Método da Bissecção
> bissecção:=proc(f, a, b, erro)
> local am, bm, xm, m:
> am:=evalf(a): bm:=evalf(b):
> if f(am)*f(bm)>=0 then ERROR("intervalo inválido") fi:
> for m from 1 do xm:=(am+bm)/2:
> if f(am)*f(xm)>0 then am:=xm
> elif f(am)*f(xm)<0 then bm:=xm
> else break fi:
> if evalf(abs(am-bm))<erro then break fi:
> od:
> print("A raíz aproximada após", m, "iterações do método da bissecção é:"):
> print(xm):
> end:
```

Exemplos

1. $Calcula\ a\ raiz\ de\ f(x) = cos(x)\ para$

$a)\ a = 1, b = 3\ e\ erro = 0.0001.$ $b)\ a = 0, b = 1\ e\ erro = 0.0001.$

$a)$

```
> bissecção(cos,1,3,0.0001);
```

"A raíz aproximada após,"14, "iterações do método da bissecção é:

1.570739746

$b)$

```
> bissecção(cos,0,1,0.0001);
Error, (in bissecção) intervalo inválido
```

2. *Calcula a raiz* $f(x) = x^2 - 2$. *Tomando* $a = 0, b = 2$ *e com um erro* $= 0.0005$

```
> f:=x->x^2-2;
```

$$f := x \to x^2 - 2$$

```
> bissecção(f,0,2,0.0005);
```

"A raíz aproximada após,"12, "iterações do método da bissecção é:

1.414550781

MÉTODO DE NEWTON

O procedimento para obter a raiz de uma função pelo Método de Newton possui a seguinte sintaxe: Newton (função, aproximação inicial, numero de iterações, precisão).

```
> #procedura  do método de Newton
> Newton:=proc(f,aprox,num_iter,erro)
> local xm, m;
> xm:=aprox;
> for m from 1 to num_iter do
> if abs(f(xm)/D(f)(xm))<erro then break
> else xm:=xm-(f(xm)/D(f)(xm));
> fi
> od;
> if m-1=num_iter then print("Não convergiu após", m-1,"iterações pelo método de Newton
")
> else print("A solução aproximada com", m-1, "iterações pelo método de Newton é:")
> fi;
> print(evalf(xm));
> end:
```

Exemplos

1. Calcula a raiz aproximada para $f(x) = x - 2sen(x)$ pelo método de newton para: $xo = 0.5$, erro=0.0001 com 10 iterações.

```
> f:=x->x-2*sin(x);
```

$$f := x \to x - 2\sin(x)$$

```
> Newton (f, 0.5, 10, 0.0001);
```

"A solução aproximada com,"3, "iterações pelo método de Newton é:

$$-.3950\ 10^{-9}$$

2. Calcula a raiz aproximada para

$f(x) = x - x^2 - x^3$ pelo método de newton para:

$xo = -2, erro = 0.0005, número\ de\ iterações = 5$

```
> f2:=x->x-x^2-x^3;
```

$$f2 := x \to x - x^2 - x^3$$

```
> Newton(f2,-2,5,0.0005);
```

"A solução aproximada com,"3, "iterações pelo método de Newton é:'

-1.618110697

MÉTODO DO PONTO FIXO

O programa para o Método do Ponto Fixo e com o respectivo critério de paragem tem a seguinte sintaxe: Ponto_Fixo (função, aproximação inicial, número de iterações, precisão).

```
> #procedimento do método do ponto fixo
> Ponto_Fixo:=proc(f, aprox,num_iter,erro)
> local xm, m;
> xm:=evalf(aprox);
> for m from 1 to num_iter do
> if abs(f(xm)-xm)<erro then break
> else xm:=f(xm)
> fi
> od;
> if m-1=num_iter then print("Não convergiu após", m-
1,"iterações do método do ponto fixo")
> else print("A solução aproximada após", m-1, "iterações do
método do ponto fixo é", xm)
> fi;
> end:
> else print("A solução aproximada após", i-1, "iterações do
método do ponto fixo é", xx)
> fi;
> end:
```

Exemplos:

1. Calcula a raiz aproximada de $h(x) = x^2 - x - 2$ para $xo = 18$ pelo método do ponto fixo, usando a função de iteração $h1(x) = \sqrt{x+2}$ para um erro= 0.0001.

```
> h1:=x->sqrt(x+2);
```

$$h1 := x \rightarrow \sqrt{x+2}$$

```
> Ponto_Fixo(h1,18,15,0.0001);
```

"A solução aproximada após,"8, "iterações do método do ponto fixo é,"2.000127204

2.Calcula o zero a raiz aproximada da equação $x = cosx$ aplicando o método do ponto fixo, utilizando 15 iterações e um erro de 0.01.

```
> f1:=x->cos(x);
```

$$f1 := \cos$$

```
> Ponto_Fixo(f1,1,15,0.01);
```

"A solução aproximada após,"10, "iterações do método do ponto fixo é,".7442373549

MÉTODO DA SECANTE

O procedimento para obter a raiz aproximada de uma função $f(x)$ pelo método da secante é apresentado a seguir e possui a seguinte sintaxe: $Secante: = proc\ (função, aprox1, aprox2, num\_iter, erro\ )$

```
> #procedimento do Método da secante

> restart;
> Secante:=proc(f,aprox1,aprox2,num_iter,erro)
> local x, y, z, k;
> x:=evalf(aprox1); y:=evalf(aprox2);
> for k from 2 to num_iter do
> z:=(x*f(y)-y*f(x))/(f(y)-f(x));
> if abs(f(z))<erro then break
> else x:=y; y:=z;
> fi;
> od;
> print("A solução aproximada após" , k-1, "iterações do
método da secante é :", z)
> end:
```

Exemplos:

1. Calcule a raiz aproximada de $f := x \to x^3 + \cos(x)$ pelo método da secante com $x0 = 2$ $e\ x1 = 3$ com 15 iterações. Com uma precisão de 0.000001

```
> f:=x->x^3+cos(x);
```

$$f := x \rightarrow x^3 + \cos(x)$$

```
> Secante(f,2,3,50,0.000001);
```

"A solução aproximada após", 13, "iterações do método da secante é :", -.8654740330

2. Calcule a raiz aproximada de $x^2 - 2 = 0$ pelo método da secante com $x0 = 1$ $e\ x1 = 2$ com 5 iterações. Com uma precisão de 0.00001

```
> f1:=x->x^2-2;
```

$$f1 := x \rightarrow x^2 - 2$$

```
> Secante(f1,1,2,55,0.00001);
```

"A solução aproximada após", 6, "iterações do método da secante é :", 1.414213562

MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO

O procedimento do Método da Falsa Posição é semelhante ao procedimento do Método da Bissecção e possui a seguinte sintaxe: falsa-posição (função, a, b, número de iterações, erro).

```
> restart;
> falsa_posição:=proc(f, a, b,num_iter, erro)
> local am, bm, xm, m:
> am:=evalf(a): bm:=evalf(b):
> if f(am)*f(bm)>=0 then ERROR("intervalo inválido") fi:
> for m from 1 to num_iter do xm:=bm-f(bm)*(bm-am)/(f(bm)-
f(am)):
> if abs(f(xm))<erro then break
> else if f(am)*f(xm)>0 then am:=xm
> elif f(am)*f(xm)<0 then bm:=xm
> else break fi:fi:
> od:
> print("A raíz aproximada da equação", f,"=0 após", m-1,
"iterações do método de falsa posição é:"):
> print(xm):
> end:
```

Exemplos

1. Calcula a raiz aproximada da equação $x^2 - 2 = 0$, utilizando 54 iterações do método da falsa posição. Tomando $a = 0$ e $b = 2$ e $\varepsilon = 0.000001$.

```
> f:=x->x^2-2;
```

$$f := x \to x^2 - 2$$

```
> falsa_posição(f,0,2,54,0.000001);
```

"A raíz aproximada da equação", $x \to x^2 - 2$, "=0 após", 9,
"iterações do método de falsa posição é:"

1.414213500

2. Calcula a raiz da função $f(x) = x^3 + cosx$ no intervalo $I = [-2,1]$, utilizando 15 iterações da falsa posição e $\varepsilon = 0.000001$.

```
> f: =x-> x^3+cos (x);
```

$$f := x \to x^3 + \cos(x)$$

```
> > falsa_posição(f,-2,1,15,0.000001);
```

"A raíz aproximada da equação", $x \to x^3 + \cos(x)$, "=0 após", 15,
"iterações do método de falsa posição é:"

-.8613856273